

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

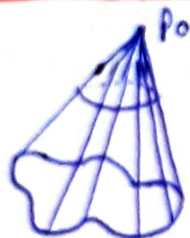
①

- Κυλινδρικές Είναι επιφάνειες που προκύπτουν από κίνηση ευθείας παράλληλης προς δοσμένο διάνυσμα και που αντιστοιχεί μια δοσμένη επιφάνεια.



Η γενική εξίσωση είναι $f(ax+by+cz+dx, ay+bx+cy+dz+dx) = 0$.

② Κωνικές επιφάνειες



Παράγονται από κίνηση ευθείας που διέρχεται από σταθερό «φίελο» $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και αντιστοιχεί σταθερή κορυφή (γ)

Η γενική εξίσωση είναι $f(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$.

όπου f φμογενής βαθμού k .

Ανταδύ $f(tA, tB, t\Gamma) = t^k f(A, B, \Gamma)$

Ειδική περίπτωση: Εάν f ομογενής, τότε θα πρέπει το αλφάριθμο των διαφίσεων των μονοφίμων ίδιο

Παράδειγμα

$$f(A, B, \Gamma) = A^2 B' \Gamma' + 3A' B \Gamma^2$$

Ομογενής βαθμού 5

Η $g(A, B, \Gamma) = A^2 B' + 3\Gamma' A B^0$ δεν είναι φμογενής.

③ ΕΚ περιστροφής επιφάνειες

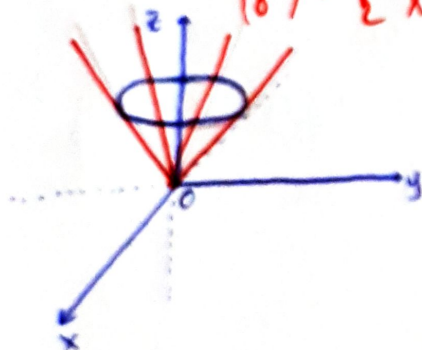
προκύπτουν από περιστροφή
καρπυιού γύρω από άξονα.

Η γενική εξίσωση είναι $f((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2, ax+by+cz) = 0$.

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 10

Άσκηση 1 Να βρεθεί η εξίσωση της κυλικής επιφάνειας με κορυφή
το σημείο $(0,0,0)$ και οδός των καρπών

$$(\gamma): \{x^2 + y^2 = x, z=1\}.$$



Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο
 $(0,0,0)$ περιγράφονται από την εξίσωση:

$$\text{Εορ.} \left\{ \frac{x-0}{a} = \frac{y-0}{b} = \frac{z-0}{c} \right\}$$

Θα πρέπει να βρούμε ποιοι ποτε τριές των παραμέτρων οι ευθείες
(Εορ.) τέμνουν των κορυφών (γ) λοβώνουμε το εώς άνω:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ z = 1 \\ y = \frac{b}{a}x \\ z = \frac{c}{a}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ z = 1 \\ x = \frac{a}{c} \\ y = \frac{b}{c} \end{cases}$$

Με ανατομή των x, y, z έχουμε:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = ac \Leftrightarrow \boxed{a^2 + b^2 - ac = 0} \quad (1).$$

Από την εξίσωση της
επίσης, έλυνται ότι

$$\begin{aligned} x &= at \\ y &= \beta t \\ z &= \gamma t \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x}{t} \\ \beta = \frac{y}{t} \\ \gamma = \frac{z}{t} \end{cases} \quad (2)$$

Από (1) ή (2) $\rightarrow \frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2} - \frac{xz}{t^2} = 0$

$$\rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - xz = 0}$$

Άσκηση 2 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $xy + z^2 - 2x - y + z = 0$
παριστάει κυνική επιφάνεια. Να βρεθεί η κορυφή της
και μια οδηγός.

Για να παριστάει η δοσμένη εξίσωση κυνική επιφάνεια, θα πρέπει
να υπάρχουν a, β, γ έτσι ώστε η $F(X-a, Y-\beta, Z-\gamma) = 0$ να είναι
ομογενής ως προς $x-a, y-\beta, z-\gamma$. όταν

$$F(x, y, z) = xy + z^2 - 2x - y + z.$$

Υπολογίζουμε

$$0 = (X-a)(Y-\beta) + (z-\gamma)^2 - 2(X-a) - (Y-\beta) + z = XY + z^2 + (2-\beta)X + (1-a)Y - 2\gamma z + a\beta + \gamma^2 + 2a - \beta + z.$$

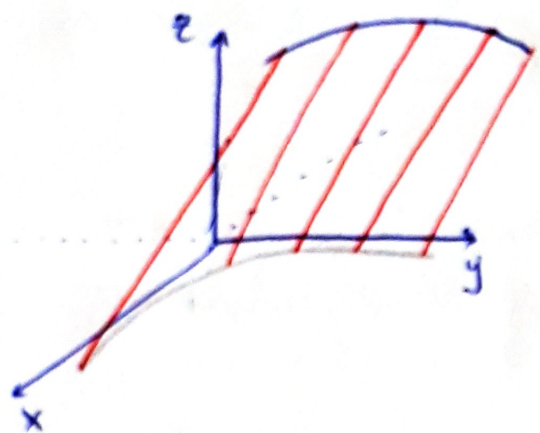
Θα πρέπει $\begin{cases} 2-\beta=0 \\ 1-a=0 \\ -2\gamma=0 \\ a\beta+\gamma^2+2a-\beta+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=2 \\ a=1 \\ \gamma=0 \\ z=0 \end{cases}$

Για $z=0$ πρέπει $0=0$
επομένως δεν θα ήταν σωστός

Η κορυφή της επιφάνειας είναι το
σημείο $K(-1, -2, 0)$. Για να βρούμε οδηγό κορυφής τέμνουμε την
επιφάνεια με ένα επίπεδο, π.χ. $\boxed{z=0}$.

Άρα (1): $\begin{cases} z=0 \\ xy - 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Άσκηση 4 Να βρεθεί η κυλινδρική επιφάνεια με γεννήτρια παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a} = (1, 1, 1)$ και ούνο των καμπών $(\gamma): \{xy=1, z=0\}$.



Μια ευθεία να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a}' = (1, 1, 1)$

$$\text{αυτή η } (E): \left\{ \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \right\}$$

$$\Leftrightarrow (E): \begin{cases} x-y=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

Επομένως, όλες οι ευθείες που είναι παράλληλες προς το $\vec{a}'$ προηγούμενων από την εξίσωση

$$(E_k): \begin{cases} x-y=1 \\ 2y-z=k \end{cases}$$

θα πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές των k , οι ευθείες (E_k) τέμνουν την καμπή (γ) .

Έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} xy=1 \\ z=0 \\ x-y=1 \\ 2y-z=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=1 \\ z=0 \\ x=1+\frac{k}{2} \\ y=\frac{k}{2} \end{cases}$$

Άρα καταγράφουμε στην $\left(1+\frac{k}{2}\right)\frac{k}{2}=1$

Άρα η επιφάνεια που ζητούμε είναι η $\boxed{\left(x-y+\frac{2y-z}{2}\right)\frac{2y-z}{2}=1}$

Άσκηση 6 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2(2x-y)^2 + (3x-z)^2 - 2 = 0$ παριστάει κυλινδρική επιφάνεια, της οποίας να βρεθεί η διεύθυνση των γενετρίων και μια οδός.

Μια κυλινδρική επιφάνεια περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής

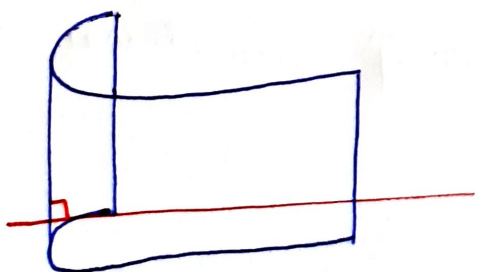
$$\underbrace{\phi(2x-y)}_A, \underbrace{(3x-z)}_B = 0.$$

Πράγματι: Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση της

$$\phi(A, B) = 2A^2 + B^2 - 2 = 0$$

με $A = 2x - y$ και $B = 3x - z$.

Άρα η εξίσωση παριστάει κυλινδρική επιφάνεια με γενετρίες παράλληλες προς την ευθεία (Ε):

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$


Για να βρούμε οδός καμπύση πρέπει να βρούμε τμή της επιφάνειας με επίπεδο (Π) κάθετο στην ευθεία (Ε).

Ας βρούμε το παράλληλο διάνυσμα της (Ε).

$$\text{Έχουμε } \vec{n} = (2, -1, 0) \times (3, 0, -1) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, 2, 3)$$

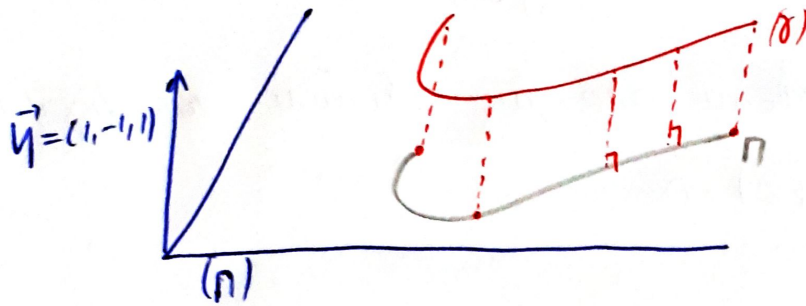
Ένα επίπεδο που είναι κάθετο στην (Ε) είναι

$$1(x-0) + 2(y-0) + 3(z-0) = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z = 0.$$

Άρα μια οδός καμπύση είναι

$$(γ) \begin{cases} 2(2x-y)^2 + (3x-z)^2 - 2 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 7 Να βρεθεί η ορμή προβολής της καμπύλης (γ) : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + 3y + z = 0. \end{cases}$
 πάνω στο επίπεδο $x - y + z = 0$.



Η ορμή προβολής θα προκύψει ως τομή της κυλινδρικής επιφάνειας με οδός των καμπών (γ) και γενεύτερες κάθετες προς το επίπεδο (n) με το επίπεδο (n) . Ένα κάθετο στο (n) είναι το διάνυσμα $\vec{n} = (1, -1, 1)$.
 Μια ευθεία παράλληλη προς το $\vec{n}$ είναι το $(\epsilon): \begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$(\epsilon) \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Όλες οι ευθείες που είναι παράλληλες προς το $\vec{n}$ έχουν εξίσωση

$$\Sigma_{\lambda, \mu}: \begin{cases} x + y = \lambda \\ y + z = \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Θα βρούμε τα λ, μ ώστε οι $(\Sigma_{\lambda, \mu})$ να τέμνουν την καμπύλη (γ) :

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + 3y + z = 2 \\ x + y = \lambda \quad (*) \\ y + z = \mu \end{cases}$$

Λίνοντας τις 3-τελευταίες ως προς x, y, z βρίσκουμε

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \mu + 2\lambda - 2 \\ y = -\mu - \lambda + 2 \\ z = 2\mu + \lambda - 2 \end{cases}$$

$$(\mu + 2\lambda - 2)^2 + (-\mu - \lambda + 2)^2 + (2\mu + \lambda - 2)^2 = 4$$

Με αναγωγή των x, y, z από το (*)

$$\Rightarrow (2+μ-2)^2 + (2-1-μ)^2 + (1+2μ-2)^2 = 4$$

$\Rightarrow$ Η κυλινδρική επιφάνεια που ζητάμε είναι

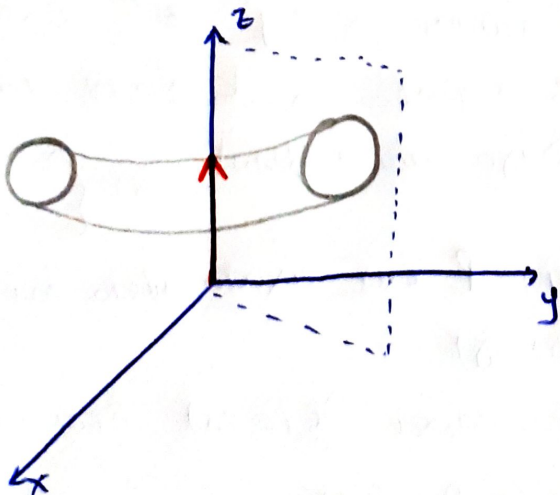
$$(2x+3y+z-2)^2 + (x+2y+z-2)^2 + (x+2y+3z-2)^2 = 4$$

Η ορθή προβολή είναι
$$\begin{cases} (2x+3y+z-2)^2 + (x+2y+z-2)^2 + (x+2y+3z-2)^2 = 4 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Άσκηση 8 Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται από περιστροφή της καμπύλης.

$$(\gamma): \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1 \\ y = 2x \end{cases}$$

γύρω από τον άξονα OZ.



Οι εξισώσεις του άξονα περιστροφής είναι

$$(\epsilon): \left\{ \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1} \right\}$$

Η κυλινδρική περιφέρεια έχει εξισώσεις

$$(K_1): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Για να προσδιορίσουμε τις αψίδες των x, y για τις οποίες η περιφέρεια τέμνει την καμπύλη, θεωρούμε το σύστημα.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ z = 1 \\ x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1 \\ y = 2x \end{cases} (*)$$

Από τις εξισώσεις

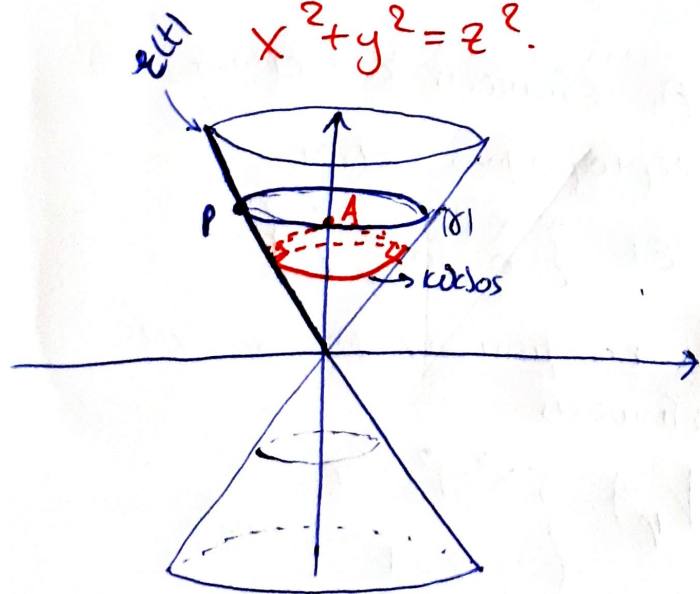
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ z = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = \pm \sqrt{\rho^2 - 1^2} / \sqrt{5} \quad (**) \\ y = \pm \sqrt{\rho^2 - 1^2} / \sqrt{5} \end{cases}$$

Από (*) και (**) βρίσκουμε ότι τα $1, \rho$ πρέπει να πληρούν τις εξισώσεις

$$\frac{\rho^2 - 1^2}{5} + \frac{4}{5} (\pm \sqrt{\rho^2 - 1^2} - 2)^2 + 1^2 = 1.$$

Η επιφάνεια που ζητάμε είναι η $\boxed{\frac{x^2 + y^2}{5} + \frac{4}{5} \left\{ \pm \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right\}^2 + z^2 = 1}$

Άσκηση 9 Να βρεθούν οι εξισώσεις του γεωμετρικού τόπου των ορίων προβολών του σημείου $A(0,0,1)$ στις γενέτρους του κώνου $x^2 + y^2 = z^2$.



Ο κώνος $x^2 + y^2 = z^2$ έχει ως κορυφή το $K(0,0,0)$ και ως οδηγό την καμπύλη $(\delta): \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

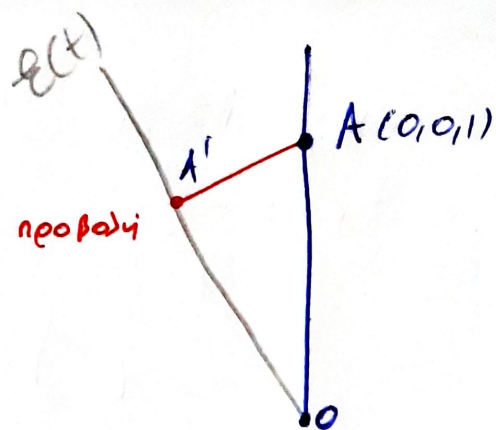
Έστω P ένα τυχαίο σημείο του κύκλου (δ) .

Τότε υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε

$$\vec{OP} = (\cos\theta, \sin\theta, 1).$$

Η εξίσωση μιας γενέτρως του κώνου που διέρχεται από το σημείο P θα είναι

$$\xi(t) = t(\cos\theta, \sin\theta, 1).$$



Ας βρούμε την προβολή A' του σημείου A πάνω στην ευθεία (E) . Το A' προκύπτει ως τομή του επιπέδου (Π) που διέρχεται από το A και τέμνει κάθετα την (E) .

Το επίπεδο (Π) είναι $\cos\theta(x-0) + \sin\theta(y-0) + 1(z-1) = 0$.

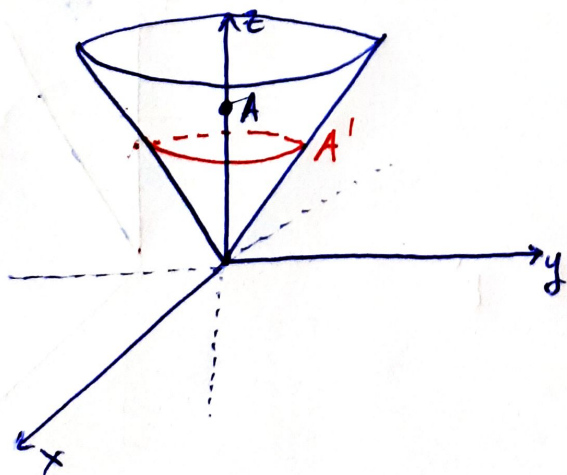
$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta x + \sin\theta y + z - 1 = 0}$$

Η τομή του (Π) με την (E) είναι $A' = (t\cos\theta, t\sin\theta, t)$.

με $\cos^2\theta t + \sin^2\theta t + t - 1 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{2}}$$

Άρα, το σημείο τομής $A' = \left(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta, \frac{1}{2}\right)$.



Άρα ο γεωμετρικός τόπος $K = \left\{ \left(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta, \frac{1}{2} \right) : \theta \in [0, 2\pi] \right\}$.

$$\Rightarrow K: \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$